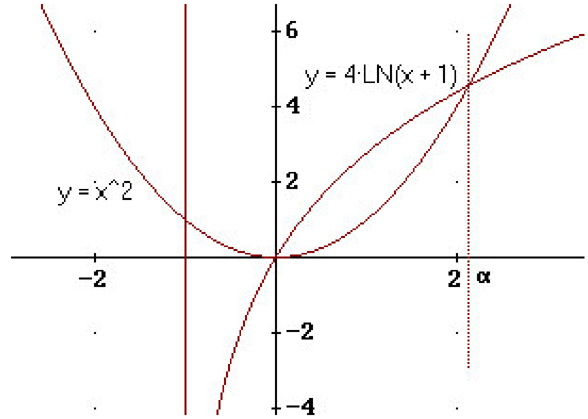
$$y = x^2 + a\log(x+b)$$ Funzione definita per $x > -b$



a) Passaggio per $O(0;0)$ $\quad 0 = a \cdot \log b \quad \rightarrow$

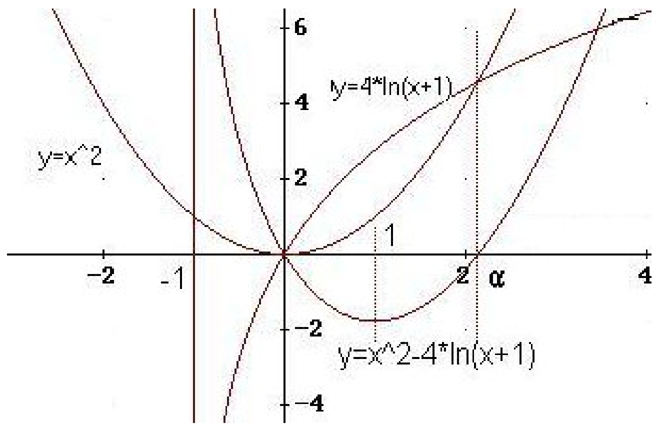
$b = 1$ con $a \neq 0$

$y' = 2x + \dfrac{a}{x+1} \qquad y'(1) = 0 \qquad \Rightarrow$

$2 + \dfrac{a}{2} = 0 \qquad \rightarrow \qquad a = -4$

La funzione data diventa $\quad y = x^2 - 4\log(x+1)$

b) Studio: Dominio $D = (-1;\infty)$



Segno: $\quad x^2 > 4 \cdot \log(x+1)$

$y > 0$ per $x \in (-1;0) \cup (\alpha;\infty)$

$y < 0$ per $x \in (0;\alpha)$

$y = 0$ *per* $x = 0 \;\vee\; x = \alpha$

con $2 < \alpha < 2{,}5$

$\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = \infty \quad \Rightarrow \quad x = -1$

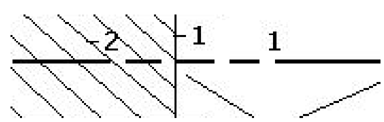
è un asintoto verticale

Essendo $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$ e

$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \infty$ la curva

non presenta né asintoti orizzontali né obliqui.

Monotonia: $\quad y' = 2x - \dfrac{4}{x+1} = \dfrac{2x^2 + 2x - 4}{x+1}$



$y' > 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 + x - 2 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad x \leq -2 \;\vee\; x \geq 1$

$f(1) = 1 - 4\log 2 = 1 - \log 2^4 \qquad \mathrm{Min}(1; 1 - \log 16)$

$y'' = 2 + \dfrac{4}{(x+1)^2} > 0 \quad \forall x \in D \quad \Rightarrow$ la curva è sempre concava in D.

c) La funzione è continua e strettamente crescente per $x > 1$. Inoltre

$f(2) = 4 - 4 \cdot \log 3 < 0$ essendo $\log 3 > 1$ e, quindi, $4 \cdot \log 3 > 4$

$f(3) = 9 - 4 \cdot \log 4 > 0$ essendo $1 < \log 4 < 2$ e, quindi, $4 \cdot \log 4 < 8$

per cui, per il teorema degli zeri, esiste un $x \in (2;3)$: $f(x) = 0$. Per determinare tale numero, usiamo il metodo di bisezione:

METODO DI BISEZIONE

n	an	f'(an)	bn	f'(bn)	xn=(bn+an)/2	f'(xn)
0	2	-0,39444915	3	3,454823	2,5	1,23894813
1	2	-0,39444915	2,5	1,238948	2,25	0,34788001
2	2	-0,39444915	2,25	0,34788	2,125	-0,0421121
3	2,125	-0,04211213	2,25	0,34788	2,1875	0,14820861
4	2,125	-0,04211213	2,1875	0,148209	2,15625	0,05187561
5	2,125	-0,04211213	2,15625	0,051876	2,140625	0,00458809
6	2,125	-0,04211213	2,140625	0,004588	2,1328125	-0,0188355
7	2,132813	-0,01883549	2,140625	0,004588	2,13671875	-0,0071421
8	2,136719	-0,00714206	2,140625	0,004588	2,138671875	-0,0012816
9	2,138672	-0,00128157	2,140625	0,004588	**2,139648438**	0,00165211
10	2,138672	-0,00128157	2,139648	0,001652	*2,139160156*	0,00018498

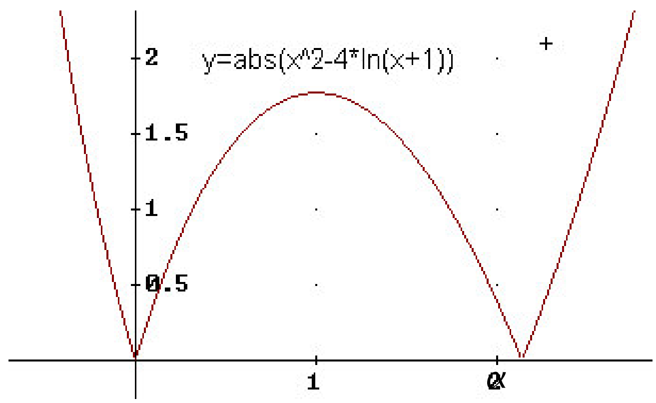
La soluzione, a meno di 1/100 si ottiene al 9° passo

d) $y(1)=1-4\log 2$ La curva richiesta si ottiene operando la seguente trasformazione:

$$\begin{cases} x = x' \\ \dfrac{y+y'}{2} = 1-4\log 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = x' \\ y = 2-8\log 2 - y' \end{cases} \rightarrow \quad y = 2\cdot 8\log 2 - x^2 + 4\log(x+1)$$

e) Il grafico richiesto si ottiene dal grafico Γ del punto b) , ribaltando, rispetto all'asse x , l'arco di curva formato dai punti le cui ascisse $\in [0;\alpha]$

La curva presenta un massimo relativo in $(1;\log 16\text{-}1)$, un minimo assoluto nei punti $(0;0)$, $(\alpha;0)$, che sono, anche, punti angolosi. Infatti



$$\left| \begin{array}{l} -1 < x \le 0 \\ x \ge \alpha \end{array} \right. \qquad y' = 2x - \frac{4}{x+1} \qquad \left| \begin{array}{l} y'_-(0) = -4 \\ y'_+(\alpha) = 2\cdot 2{,}139 - \dfrac{4}{3.139} \simeq 3 \end{array} \right.$$

$$\begin{cases} x \ge 0 \\ x \le \alpha \end{cases} \qquad y' = -2x + \frac{4}{x+1} \qquad \begin{cases} y'_-(0) = 4 \\ y'_+(\alpha) = -2\cdot 2{,}139 + \dfrac{4}{3.139} \simeq -3 \end{cases}$$